PASS 10. FUNKTIONER

10.1 Grundbegrepp om funktioner

Mamman i den finländska modellfamiljen från pass fyra brukade dammsuga det 100 m^2 stora huset varje lördag. Det tog 30 minuter. Efter att pappan hade gjort huset mindre tog dammsugningen av det 49 m^2 stora huset bara 14 minuter och 42 sekunder av mamman. I det 100 m^2 stora huset offrade mamman $\frac{30\,min \cdot 60\frac{s}{min}}{100\,m^2} = 18\frac{s}{m^2}$ åt dammsugning av en kvadratmeter. I det 49 m^2 stora huset krävde en kvadratmeter $\frac{14\,min \cdot 60\frac{s}{min} + 42\,s}{49\,m^2} = 18\frac{s}{m^2}$, alltså samma tid. Vi kan säga att den tid som mamman behövde åt dammsugning var beroende av husets storlek.

Har du förstått? I

Avståndet från Helsingfors till Lahtis är 100 km. Om pappan i den finlänska modellfamiljen kör 100 km/h från Helsingfors till Lahtis är resetiden en timme. Om han däremot kör 120 km/h blir resetiden endast 50 min. Den tid som används åt resan Lahtis-Helsingfors är beroende på a) avståndet Helsingfors-Lahtis b) hastighet c) ingetdera av a) och c).

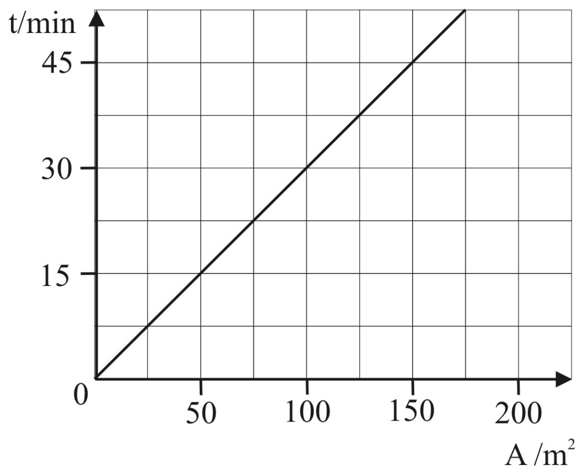
Definition av en funktion

En funktion är ett samband mellan två variabler där värdet av en variabel (beroende variabel, funktionsvärde) bestäms av värdet hos en oberoende variabel.

Då det gäller dammsugning är variablerna städningstid och husets storlek. Då vi gör så här måste vi anta att städningshastigheten är en konstant. Städningstid är en funktion av husets storlek. Det här sambandet kan vi beskriva med hjälp av tabellen här nedan, med grafen i figur 15 eller med formeln $t = f(A) = 0{,}3 \cdot A$ där A är husets area i kvadratmeter och t städningstiden i minuter. I formeln ovan är A det tal som sätts in, alltså variabeln eller argument. A är nu en oberoende variabel och t en beroende variabel för att A kan vi välja och värdet på t är beroende av A.

Husets storlek A (m^2)	Städningstid t (min)

0	0
50	15
100	30
150	45



Figur 15.

Linjen i figur 15 har ekvationen $t=0{,}3\cdot A$. Det är en linjär funktion. Det finns också en massa andra funktioner i matematik. Till exempel har vi bekantat oss med trigonometriska funktioner under det sista året i grundskolan. Variablerna hos funktionen cosinus är den närliggande katetens längd och hypotenusans längd i en rätvinklig triangel. Cosinus anger förhållandet mellan den närliggande katetens längd och hypotenusans längd i en rätvinklig triangel.

Har du förstått? II

I tabellen nedan har vi tre x-värden och motsvarande y-värden. Tabellen beskriver funktionen $y=h(x)$.

x-värdena (D_f)	y-värdena (V_f)
−2	0
0	2
2	4

Funktionssambandet i tabellen kan beskrivas med formeln

a) $y=h(x)=y+2$ b) $y=h(x)=x+2$ c) $y=f(x)=x+2$.

10.2 Beteckningar och begrepp med funktioner

Vanligen betecknas en funktion med f. Men det finns även andra möjligheter något som vi inser med hjälp av exempel 1.

Exempel 1. I ett funktionssamband ges varje naturligt tal x ett motsvarande naturligt tal y så att talet y är två gånger talet x. Bilda ett funktionsuttryck för det här sambandet.

Vi kan uttrycka det här sambandet på flera olika sätt:

a) $y=2x$ b) $y=f(x)=2x$ c) $y=h(x)=2x$ d) $f:f(x)=2x$

e) $y=s(x)=2x$ f) $x\rightarrow f(x)$ e) $x\rightarrow 2x$, där $x\in\mathbb{N}$.

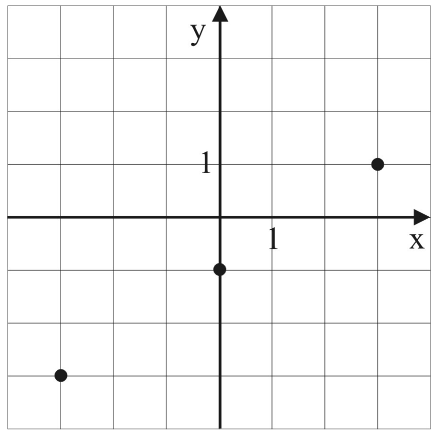
Med en funktions definitionsmängd (x-värdena) D_f avser vi alla de tillåtna värdena av oberoende variabel. Med en funktions värdemängd (y-värdena) V_f avser vi de erhållna värdena av den beroende variabeln.

Exempel 2. Låt $y=f(x)=\frac{2}{3}x-1$ och $D_f=\{-3,0,3\}$. Bestäm värdemängden V_f och rita funktionens graf.

Vi gör en tabell. Nu är -3, 0 och 3 de oberoende x-värdena. De motsvarande av x beroende y-värdena får vi då vi insätter -3, 0 och 3 i stället för x i funktionsuttrycket $f(x)$.

x-värdena (D_f)	y-värdena (V_f) $y=f(x)=\frac{2}{3}x-1$	talpar (x,y)
-3	$\frac{2}{3}\cdot(-3)-1=-3$	$(-3,-3)$
0	$\frac{2}{3}\cdot 0-1=-1$	$(0,-1)$
3	$\frac{2}{3}\cdot 3-1=1$	$(3,1)$

Grafen av den givna funktionen har vi i figur 16 här nedan.

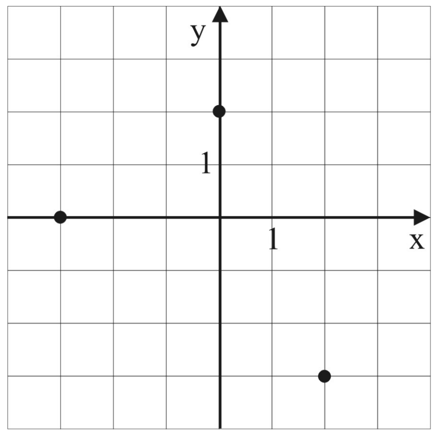


Figur 16.

Om definitionsmängden i exempel 2 vore alla reella tal i stället för -3, 0 och 3 skulle grafen vara linjen $y=\frac{2}{3}x-1$. Men nu består grafen bara av tre enstaka punkter på den här linjen.

Har du förstått? III

Här nedan i figur 17 ser vi grafen av en funktion f.



Figur 17.

I figur 17 är $f(0)$ a) 0 b) 1 c) 2 .

Har du förstått? IV

I figur 17 är $f(x)=-3$ då a) $x=2$ b) $x=0$ c) $x=-3$.

En funktions nollställe är det värde på den oberoende variabeln som ger funktionsvärdet noll. Nollstället får vi genom att lösa ekvationen $f(x)=0$.

Exempel 3. Bestäm nollstället till funktionen a) y då $y=f(x)=x+3$ b) h då $h:h(a)=a^2-a$.

a) Vi löser ekvationen f(x)=0.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ Svar: Nollstället är $\underline{x=-3}$.

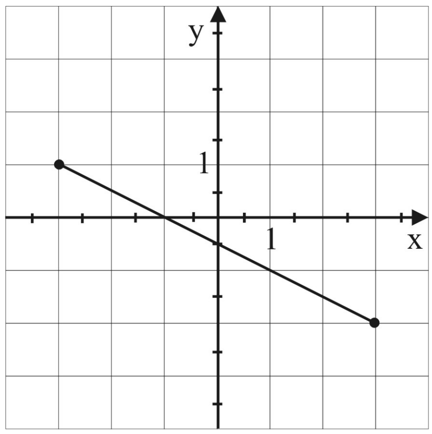
b) Nu löser vi ekvationen $h(a)=0 \Leftrightarrow a^2-a=0 \Leftrightarrow a(a-1)=0 \Leftrightarrow a=0 \vee a=1$

Svar: Nollstället är $\underline{a=0}$ eller $\underline{a=1}$.

Har du förstått? V

Funktionen i figur 17 har nollstället a) $x=0$ b) $y=0$ c) $x=-3$.

Exempel 4. I figur 18 nedan ser vi grafen av en funktion. Funktionen har definitionsmängden $-3 \le x \le 3$. Bestäm a) $f(1)$ b) funktionssambandet c) nollstället till funktionen d) funktionens V_f med hjälp av figuren. e) För vilket värde på x är $f(x)=-2$? f) Bestäm $f(a), -1<a<1$ med hjälp av funktionssambandet.



Figur 18.

a) Vi går från origo till ettan på x-axeln och fortsätter nedåt. Då $y=1$ är vi på grafen. Alltså $\underline{f(1)=-1}$.

b) Enligt figur 18 har den givna funktionen en del av en linje som graf. Vi bestämmer linjens ekvation enligt pass 8.1 och figur 7. Ur figur 18 ser vi att linjen skär y-axeln i punkten $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ och så är $b=-\frac{1}{2}$. Då vi går från den här punkten två steg till vänster och ett steg uppåt är vi igen på linjen. Så har linjen riktningskoefficienten $k=-\frac{1}{2}$. Nu är linjens ekvation $y=kx+b=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$. Funktionssambandet är $\underline{y=f(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$ där $-3 \le x \le 3$.

c) $f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-1$ Algebraiskt fick vi att nollstället är $\underline{x=-1}$.

Ur figur 18 framgår det att linjen faktiskt skär x-axeln i punkten $(-1,0)$ något som stämmer överens med det algebraiska resultatet.

d) Ur figur 18 ser vi att y-värdena är mellan -2 och 2. Så har funktionen värdemängden $\underline{-2 \le y \le 2}$.

e) Ur figur 18 får vi grafiskt att $f(3)=-2$. Vi kontrollerar resultatet genom att lösa ekvationen

$f(x)=-2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=-2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x=-2+\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{x}{2}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=3$. Alltså $x=3$ då $f(x)=-2$.

f) a hör till funktionens definitionsmängd. Nu sätter vi bara a in i funktionsuttrycket i stället för x . Vi får $\underline{f(a)=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}}$.

Har du förstått? VI

Låt $g(x)=x^2-a$. Då är $g(0)$ lika med a) 0 b) x^2 c) $-a$.

Har du förstått? VII

Låt $s(y)=y^2+a^2$. Då är $s(a)$ lika med a) a^2 b) $2a^2$ c) y^2+a^2 .

Har du förstått? VIII

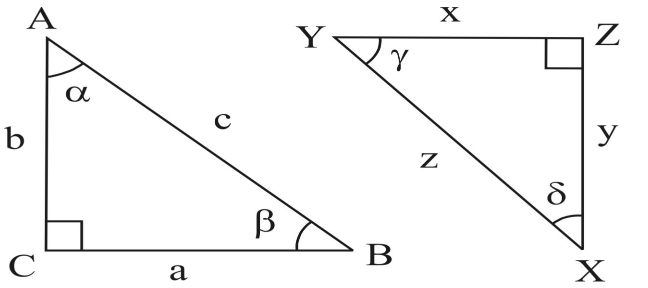
Nollstället till funktionen $y=f(x)=x+2$ är a) -2 b) 0 c) 2 .

10.3 Begreppsfrågor X

1. Vad är en funktion?
2. I ett funktionssamband ges varje naturligt tal a ett motsvarande rationellt tal b så att talet b är hälften av talet a . Ange så många sätt som möjligt att uttrycka det här funktionssambandet.
3. Förklara begreppen definitionsmängd och värdemängd.
4. Hur ritar man grafen till en funktion? Kan grafen till en funktion bestå av enstaka punkter?
5. Hur bestämmer man nollstället för en funktion?
6. Kan släktskapsförhållanden tolkas som funktioner?

10.4 Uppgifter

1. Här nedan i figur 19 har vi två rätvinkliga trianglar.



Figur 19.

Repetera definitionerna på de trigonometriska funktionerna sinus, cosinus och tangens. Bestäm med hjälp av figur 19. a) $\sin\beta$ b) $\cos\alpha$ c) $\sin\alpha$ d) $\tan\alpha$

e) $\sin\gamma$ f) $\cos\delta$ g) $\cos\gamma$ h) $\tan\delta$.

2. Firman Patriks Partaj hyr ut en festlokal. De debiterar en fast grundavgift på 100 euro och dessutom en avgift på 5 euro för varje gäst. Hur stor är festlokalshyran y om a) lokalen är uthyrd och inga gäster kommer b) lokalen är uthyrd och det kommer 10 gäster c) lokalen är uthyrd och det kommer x stycken gäster?

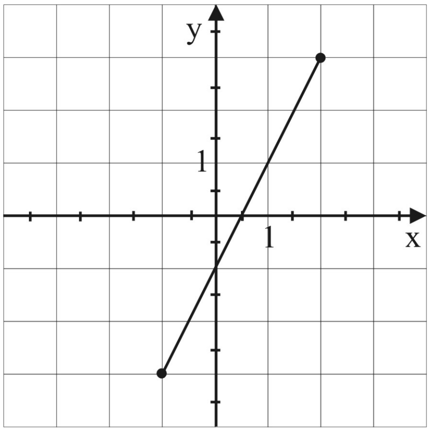
3. Låt $y=f(x)=x^2-\frac{1}{2}x+1$ och $D_f=\{-2,-1,0,1,2\}$. Bestäm värdemängden V_f och rita funktionens graf.

4. Bestäm nollstället till funktionen a) $y=f(x)=x-4$ b) $f(x)=x^2+5x$

c) $y=f(x)=x^2$ d) $u=f(v)=v+3$ e) $g(a)=a^2+2a+1$ f) $s(t)=t^2-9$

5. Bestäm a) $f(2)$ b) $f(0)$ c) $f(a)$ d) $f(y^2)$ då $f(x)=\frac{x+1}{3}$.

6. I figur 20 nedan har vi grafen av en funktion.



Figur 20.

Funktionen har värdemängden $-3 \leq y \leq 3$. a) Vilken definitionsmängd har funktionen? b) Bestäm $f(0)$ och $f(-1)$ med hjälp av figuren. c) Bestäm funktionssambandet. d) Bestäm nollstället till funktionen. e) För vilket värde på x är $f(x)=3$?

7. Låt $f(x)=x^2+x-7$ och $g(x)=x^2-x$. Lös ekvationen $f(x)=g(x)$.

8. Låt $f(x)=x+a$ och $g(a)=a$. Lös ekvationen $f(x)=g(a)$ med avseende på x.

9. En konstant funktion har samma värde oberoende av variabelvärdet. Om $f(x)=2$ gäller det till exempel att $f(2)=2$ och $f(345)=2$. Låt $g(a)=5$. Bestäm a) $g(5)$ b) $g(0)$ c) Har $g(a)$ ett nollställe?

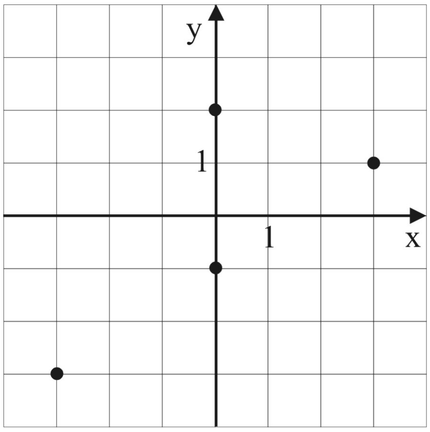
10.* Värdet av en funktion kan ibland vara beroende av flere variabler än en variabel. Ekvationen $c=f(a,b)=a^2+2\text{ab}+b^2$ definierar c som funktion av a och b . Vilket värde får c då $a=2$ och $b=1$? Vad är värdet av c då $a=b$?

11.* Exakt definierar vi funktionsbegreppet så här:

$$\forall x \in A : \exists y \in B : y = f(x) \wedge f(x) = y_1 \wedge f(x) = y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2 \quad .$$

Det här symboliska språket kan översättas till svenska: En funktion från en mängd A till en mängd B är en regel som till varje element x i A entydigt ordnar ett och endast ett element i B.

Beskriver figur 21 en funktion a) $x \to y$ b) $y \to x$?



Figur 21.

12.* Använd den exakta definitionen för funktionbegreppet och besvara följande frågor:

i) Ulrika har samtidigt två pojkvänner, Ulf och Hasse. Existerar det en funktion $\mathit{Ulf} \leftarrow \mathit{Ulrika} \rightarrow \mathit{Hasse}$? Observera att Ulrika är nu definitionsmängden.

ii) Ville sällskapar samtidigt med Linda och Lotta. Existerar det en funktion $\mathit{Linda} \rightarrow \mathit{Ville} \leftarrow \mathit{Lotta}$? Observera att Ville är nu värdemängden.