PASS 2. POTENSRÄKNING

2.1 Definition av en potens

Typiskt för matematik är ett kort, lätt och vackert framställningssätt. Den upprepade additionen $3+3+3+3+3$ går att skriva kortare i formen $5\cdot 3$ där 5 anger antalet upprepade termer i additionen och 3 storleken av termen. På motsvarande sätt kan vi skriva den upprepade multiplikationen $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ som potens 3^5. I den här potensen utgör det i motsvarande multiplikationen upprepade talet 3 bas. Talet 5 som anger antalet upprepningar av 3 i motsvarande multiplikation utgör exponent. Potensen 3^5 har värdet $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=243$. Potensen a^n betyder en produkt av n stycken faktorer a:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\,st}\text{ , }a\,bas\text{ , }n\,exponent$$

Exempel 1. Skriv som potens a) $x\cdot x$ b) $113\cdot 113$ c) $1\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 3$

a) $x\cdot x=\underline{x^2}$ b) $113\cdot 113=\underline{113^2}$ c) $1\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 3=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3=1^4\cdot 3^2=\underline{3^2}$

Har du förstått? I

$\underbrace{m\cdot m\cdot m\cdot \ldots \cdot m}_{n\,st}$ kan skrivas som potens a) n^m b) m^n c) mn

2.2 Exponentens verkningsområde och potens med negativ bas

Endast det tal som har exponenten i sitt högra övre hörn påverkas av exponenten. Basen skall sättas inom parentes om basen har ett förtecken eller om basen är ett uttryck.

Om basen i en potens är negativ och exponenten jämn är potensens värde positivt. Om basen i en potens är negativ och exponenten udda är potensens värde negativt. Om basen i en potens är positiv är potensens värde positivt oberoende av om exponenten är jämn eller udda.

Exempel 2. a) $-2^2=-2\cdot 2=\underline{-4}$ b) $(-2)^2=(-2)\cdot(-2)=\underline{4}$ c) $(-2)^3=-2^3=\underline{-8}$

d) $(-2)^4=2^4=\underline{16}$ e) $2^3=\underline{8}$ f) $2^6=\underline{64}$

Har du förstått? II

-3^2 är lika med a) $(-3)\cdot(-3)$ b) $-3\cdot 2$ c) $-3\cdot 3$

2.3 Ordningsföljd mellan räknesätt

Räknesätten har följande ordningsföljd:

1. Parenteser
2. Potensering
3. Multiplikation och division från vänster till höger
4. Addition och subtraktion från vänster till höger

Exempel 3. a) $(5-2)^2=3^2=\underline{9}$ b) $5-2^2=5-4=\underline{1}$ c) $(5\cdot 2)^2=10^2=\underline{100}$

d) $5\cdot 2^2=5\cdot 4=\underline{20}$

2.4 Potenser med samma bas

Multiplikation

Då vi multiplicerar 2^3 och 2^4 får vi $2^3\cdot 2^4=\underbrace{2\cdot 2\cdot 2}_{3\,st}\,\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{4\,st}=\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{7\,st}=2^7$. I multiplikation av potenser med samma bas adderar vi exponenterna. Basen förblir densamma:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

Exempel 4. a) $y^3\cdot y\cdot y^5=y^{3+1+5}=\underline{y^9}$ b) $(-2)^4\cdot(-2)^3=(-2)^7=\underline{-128}$

Har du förstått? III

i) $2^{2\mathrm{m}}\cdot 2^m$ är lika med a) $2^{3\mathrm{m}}$ b) $4^{2\mathrm{m}^2}$ c) $m\cdot 2^{2+1}$

ii) $(-y)^2\cdot(-y)\cdot(-y)^3$ förenklat är a) $(-y)^{2+1+3}=(-y)^6=y^6$ b) $(-y)^{2+3}=(-y)^5=-y^5$

c) $2\cdot 3\cdot(-y)\cdot(-y)\cdot(-y)=6\cdot(-y)^3=-6\,y^3$

iii)

$(abc)^2$ förenklat är a) $2\cdot abc$ b) $2\cdot a\cdot 2\cdot b\cdot 2\cdot c=8\cdot abc$ c) $a^2b^2c^2$

Division

Då vi bildar kvoten av 3^5 och 3^2 får vi $\frac{3^5}{3^3}=\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3}=\frac{\cancel{3\cdot 3\cdot 3}\,3\cdot 3}{\cancel{3\cdot 3\cdot 3}}=3\cdot 3=3^2=3^{5-3}$. Allmänt gäller för division av potenser med samma bas:

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\,,\,a\neq 0$$

Exempel 5. a) $\frac{2^{6002}}{2^{6000}}=2^{6002-6000}=2^2=\underline{4}$ b) $\frac{y^5\cdot y^4\cdot y}{y^{16}\div y^7}=\frac{y^{5+4+1}}{y^{16-7}}=\frac{y^{10}}{y^9}=y^{10-9}=y^1=\underline{y}$

Har du förstått? IV

$\frac{x^{10}}{x^2}$ förenklat är a) $x^{\left(\frac{10}{2}\right)}=x^5$ b) $\frac{\cancel{x}^{10}}{\cancel{x}^2}=\frac{10}{2}=5$ c) $x^{10-2}=x^8$

2.5 Potenser med olika bas

Potens av en produkt

Då vi upphöjer uttrycket ab till 3 får vi $(ab)^3=ab\cdot ab\cdot ab=a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b=a^3\cdot b^3=a^3b^3$. Allmänt gäller för potens av en produkt:

$$(ab)^n=a^nb^n$$

Exempel 6. a) $(-2\text{xyz})^3=(-2)^3\cdot x^3\cdot y^3\cdot z^3=\underline{-8\text{x}^3y^3z^3}$ b) $(2\cdot 50)^2=100^2=\underline{10000}$ eller

$(2\cdot 50)^2=2^2\cdot 50^2=4\cdot 2500=\underline{10000}$

Potens av en kvot

Då vi upphöjer uttrycket $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ till 3 får vi $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}=\frac{a^3}{b^3}$. Allmänt gäller för potens av en produkt:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\,,\,b\neq 0$$

Exempel 7. a) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4^2}{3^2}=\frac{16}{9}=\underline{1\frac{7}{9}}$ b) $\left(\frac{-2\text{xy}}{z}\right)^3=-\frac{2^3\cdot x^3\cdot y^3}{z^3}=\underline{-\frac{8\text{x}^3y^3}{z^3}}$

c) $\frac{48^5}{24^5}=\left(\frac{48}{24}\right)^5=(48\div 24)^2=2^5=\underline{32}$

Har du förstått? V

$\left(1\frac{1}{2}\right)^3$ är lika med a) $\left(1^3\frac{1^3}{2^3}\right)=1\frac{1}{8}$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{3^2}{2^2}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$

2.6 Potens av en potens

Då vi upphöjer uttrycket 2^3 till 4 får vi $(2^3)^4=2^3\cdot 2^3\cdot 2^3\cdot 2^3=2^{3+3+3+3}=2^{3\cdot 4}=2^{12}$. Allmänt gäller för potens av en produkt:

$$(a^m)^n=a^{mn}=a^{nm}$$

Vid potensering av en potens multiplicerar vi exponenterna. Basen förblir densamma.

Exempel 8. a) $(2^3)^4=2^{3\cdot 4}=2^{12}=\underline{4096}$. $(2^3)^4$ är en potens av en potens.

b) $2^{3^4}=2^{81}=\underline{2\ 417\ 851\ 639\ 229\ 258\ 349\ 412\ 352}$. 2^{3^4} är inte en potens av en potens utan en potens av 2 där exponenten är en potens.

2.7 Potens med exponenten noll

Vi räknar $\frac{3^2}{3^2}$ på två olika sätt. I det ena sättet utför vi först potenseringen: $\frac{3^2}{3^2}=\frac{9}{9}=1$. I det andra sättet utnyttjar vi räkneregeln för kvoten av potenser med samma bas: $\frac{3^2}{3^2}=3^{2-2}=3^0$. Vi definierar att $3^0=1$ för att vi hade samma uttryck $\frac{3^2}{3^2}$ i början. Allmänt gäller för potens med exponenten noll:

$$a^0=1, a\neq 0$$

Exempel 9. a) $12^0=\underline{1}$ b) $3\cdot\pi^0=3\cdot 1=\underline{3}$ c) $0^6\cdot 6^0=0\cdot 1=\underline{0}$.

Har du förstått? VI

$(2^1)^0$ är lika med a) $2^{(1\cdot 0)}=2^0=1$ b) $2^{1^0}=2^1=2$ c) $2\cdot 1\cdot 0=0$

2.8 Potens med negativ exponent

Vi räknar $\frac{3^2}{3^4}$ på två olika sätt. I det ena sättet skriver vi först potenserna som produkt och förkortar därefter: $\frac{3^2}{3^4}=\frac{3\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}=\frac{\cancel{3\cdot 3}}{\cancel{3\cdot 3}3\cdot 3}=\frac{1}{3^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$. I det andra sättet utnyttjar vi räkneregeln för kvoten av potenser med samma bas: $\frac{3^2}{3^4}=3^{2-4}=3^{-2}$. Härav får vi att $3^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$. Vi kan också beräkna på varandra följande potenser av 3 och så får vi $3^3=27,\ 3^2=9,\ 3^1=3,\ 3^0=1,$. Nu märker vi att följande värde blir alltid en tredjedel av det föregående. Därför är det logiskt att fortsätta $3^{-1}=\frac{1}{3},\ 3^{-2}=\frac{1}{9},\ 3^{-3}=\frac{1}{27,}\ldots$. Allmänt gäller för potens med negativ exponent:

$$a^{-n}=\left(\frac{a}{1}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}\quad \text{och}\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

I regeln ovan byter vi den negativa exponenten till en positiv exponent samtidigt som vi byter basen till sitt inverterade tal.

Exempel 10. a) $9^{-2}=\left(\frac{1}{9}\right)^2=\underline{\frac{1}{81}}$ b) $0{,}01^{-2}=\left(\frac{1}{100}\right)^{-2}=\left(\frac{100}{1}\right)^2=100^2=\underline{10000}$ eller

$0{,}01^{-2}=\left(10^{-2}\right)^{-2}=10^{(-2)\cdot(-2)}=10^4=\underline{10000}$ c) $y^3\div y^6=y^{3-6}=\underline{y^{-3}}$.

Har du förstått? VII

$\left(\frac{-8}{4}\right)^{-3}$ är lika med a) $\frac{8^3}{4^{-3}}$ b) $(-2)^{(-3)}=\left(\frac{-2}{1}\right)^{-3}=\left(\frac{-1}{2}\right)^3$ c) $\left(\frac{4}{8}\right)^3$

2.9 Tal i tiopotensform

Mycket stora eller små tal är jobbiga att skriva. Vi kan undvika en massa nollor i slutet av ett heltal eller i början av ett decimaltal genom att skriva sådana tal i tiopotensform:

$$a\cdot 10^n\ ,\ \text{där}\quad 1\le a<10\quad \text{och}\quad n\in\mathbb{Z}$$

Exempel 11. a) Invånarantalet i Finland är ungefär $5\ 200\ 000$. Skriv detta i tiopotensform.

$5\ 200\ 000=5\ 200\ 000{,}0$ Vi flyttar decimaltecknet 6 steg åt vänster något som vi kompenserar med 10^6 . Alltså $5\ 200\ 000=\underline{5{,}2\cdot 10^6}$. Den positiva exponenten är antalet steg som decimaltecknet flyttats åt vänster.

b) Skriv talet 0,000000000345 i tiopotensform.

Vi flyttar decimaltecknet 10 steg åt höger något som vi kompenserar med 10^{-10}. Alltså $0{,}000000000345 = \underline{3{,}45 \cdot 10^{-10}}$. Den negative exponenten är antalet steg som decimaltecknet flyttats åt höger.

Exempel 12. Skriv på vanligt sätt. a) $2{,}7 \cdot 10^{8}$ b) $1{,}023 \cdot 10^{-3}$.

a) Decimaltecknet flyttas 8 steg åt höger. $2{,}7 \cdot 10^{8} = \underline{270\ 000\ 000}$.

b) Decimaltecknet flyttas 3 steg åt vänster $1{,}023 \cdot 10^{-3} = \underline{0{,}001023}$.

Har du förstått? VIII

$0{,}00100200$ i tiopotensform är a) $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ b) $2{,}0 \cdot 10^{-6}$ c) $1{,}002 \cdot 10^{-3}$

2.10 Begreppsfrågor II

1. Vad menas med potens?
2. När måste basen i en potens sättas inom parentes?
3. Vilken ordningsföljd har räknesätten?
4. Lär dig utantill de vanligaste potensräkningsreglerna.
5. Vad är differensen mellan en potens av en potens och en potens där exponenten är en potens? Ge exempel på detta!
6. Vilken allmän egenskap har potens med exponenten noll?
7. Kan man konstatera att $0^{0} = 0$?
8. Låt a^{-n} vara en potens med negativ exponent. Hur påverkas basen a av att den negativa exponenten byts ut till en positiv exponent?
9. Vilken nytta har man av tiopotensformen?

2.11 Uppgifter

1. Skriv som potens a) $114 \cdot 114$ b) $c \cdot c$ c) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{t\ st}$ d) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

2. Förenkla a) $(-1)^{100}$ b) $(-1)^{99}$ c) -3^{5} d) $(-3)^{5}$ e) $-0{,}3^{3}$ f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2}$ g) $\frac{2^{2}}{5}$

3. Förenkla a) $0{,}5^{3} \cdot (-8) + 10 \cdot 0{,}1$ b) $0{,}8 \cdot (-1)^{5} - (-0{,}2)^{2}$ c) $(2^{5} - 3^{2}) \div (-0{,}4)$

d) $(-0{,}1)^{3} \cdot 200 \cdot 5^{3}$ e) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \frac{8}{27} + \left(\frac{1}{10}\right)^{2}$

4. Förenkla a) $x^{2} \cdot x^{2}$ b) $a^{4} \cdot a^{x} \cdot a^{2} \cdot a^{-x} \cdot a$ c) $(-y)^{5} \cdot (-y)^{5}$ d) $a^{4} \cdot a \cdot a^{2}$ e) $x^{2} + x^{2}$

5. Skriv som en enda potens a) $\frac{x^8}{x^5}$ b) $\frac{x^5}{x^8}$ c) $\frac{2^{702}}{2^{700}}$ d) $\frac{12^{13}}{12^{14}}$ e) $\frac{z^{11} \cdot z^2}{z^5 \cdot z^6}$

f) $b^{19} \cdot b^3 \div b^{20}$

6. Bestäm värdet av uttrycket $\frac{x^{20} \cdot x^{41} \cdot x^{30}}{x^{24} \cdot x^{67}}$ då $x=41$.

7. Förenkla a) $(6x)^2$ b) $(ab)^3$ c) $(2a)^2$ d) $(-10y)^9$ e) $\frac{2^3}{3}$ f) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$.

8. Skriv som en enda potens a) $(3^2)^4$ b) $(2^5)^2$ c) $(m^2)^5$ d) $(a^7)^m$ e) $(x^m)^5$.

9. Vi kan skriva 3^6 som potens av en potens enligt följande: $3^6=(3^2)^3$ .Skriv som potens av en potens a) 5^{15} b) a^8 c) c^{36} d) b^{24} e) 2^4

10. Förenkla a) $(0{,}1\,a^3)^2$ b) $(-1{,}7\,b^2)^3$ c) $(0{,}25\,a^2b^3)^2$ d) $\left(\frac{x}{2y}\right)^3$ e) $\left(\frac{2a^3}{3b^2}\right)^3$

f) $\left(\frac{hi^2}{fk^2}\right)^4$

11. Förenkla a) 5^0 b) $(x^2)^0$ c) $(s-1)^0$ d) $(1-s^2)^0$ e) $(17^0)^2 \cdot (8^0)^{11}$

f) $\left(23\frac{4}{13}+15\frac{8}{11}\right)^0$

12. Förenkla a) 3^{-2} b) 1^{-17} c) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-2}$ d) $0{,}02^{-3}$ e) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^{-3}$ f) $(2y)^{-3}$

g) $a^{-1} \cdot a^{-1}$ h) $a^{88} \div a^{-8}$ i) $\frac{x^7}{(-x)^{-3}}$ j) $\left(\frac{c}{3ab}\right)^{-2}$

13. Skriv i tiopotensform a) 100 b) 0,00203 c) 540 000 d) 20 e) 1 f) $534\underbrace{000\ldots0}_{340\,st\,nollor}$

14.* a) Förenkla $\left[\left(\frac{knp}{a^2b}\right)^4 \div \left(\frac{k^2n^2}{a^3b^2}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\frac{a^3b^4c}{k\,p^3}\right)^6 \div \left(\frac{a^5b^8c^2}{k^2p^5}\right)^3\right]$

b) Skriv talet $\left(\frac{1}{2}\right)^{20000}$ i tiopotensform med två gällande siffrors noggrannhet.

c) $2^{1004} \cdot 4^{103} \div 8^{402}$