PASS 5. FAKTORISERING AV POLYNOM

5.1 Nyttan av faktorisering och faktorisering av heltal

Har vi nytta av att kunna faktorisera polynom? Ja det har vi. Bra kunskaper i faktorisering av polynom möjliggör ett effektivt sätt att förkorta och förlänga uttryck. Dessutom kan vi med hjälp av faktorisering bestämma nollställen av olika uttryck och undersöka teckenväxling av uttryck. Vid lösning av ekvationer och olikheter är faktorisering en användbar metod. Goda kunskaper i faktorisering är till stor hjälp då vi studerar de första kurserna i lång matematik. En viktig förutsättning för att vi klarar oss bra i differentialkalkyl senare är att vi behärskar faktorisering utmärkt.

Enkelt sagt är faktorisering multiplikation i motsatt riktning. Till exempel är $3\cdot 7=21$. Nu är 21 faktoriserat $3\cdot 7$. Talet 12 faktoriserat är inte bara $3\cdot 4$ utan där skall vi faktorisera talet 4 också. Så får vi att $12=2\cdot 2\cdot 3$. Då vi faktoriserar ett tal delar vi upp det i sådana faktorer som alla är primtal. Primtal är ett naturligt tal som är delbart endast med 1 och sig självt. 0 och 1 är inte primtal. De tio första primtalen är 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 och 29. Då vi faktoriserar tal skriver vi dem som produkten av primtal. Talet 192 faktoriserat är $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$. Ett program för faktorisering av heltal hittar vi på nätadressen *http://www.abc.se/~m9847/matmin/delbar.html?string1=12#prim.*

Har du förstått? I

De här talen är primtal a) 29,49 och 61 b) 97, 83 och 89 c) 0, 2 och 3.

5.2 Faktoriseringsmetoder för polynom

Utbrytning av en gemensam konstant

Då vi faktoriserar ett polynom skriver vi det som produkten av två eller flera polynom vars grad är lägre än det ofaktoriserade polynomets grad. Vid faktorisering av polynom skall vi alltid först kontrollera om termerna i polynomet har en gemensam faktor som vi kan bryta ut. Den hittar vi genom att studera variabeldelarna och undersöka vad de har gemensamt. Vi bryter ut den största möjliga gemensamma faktorn för termerna. Faktoriserar vi a^5+a^4 räcker det inte med att skriva $a^5+a^4=a(a^4+a^3)$ utan a^4+a^5 faktoriserat är $a^4(a+1)$ I exempel 1 har vi faktoriserat polynom med hjälp av utbrytningsmetoden.

Exempel 1. Faktorisera polynomen a) x^2+x b) $15y^3+5y$ c) x^2y-xy^2 d) $8xy$ e) $10x+5$.

a) $x^2+x=x\cdot x+x\cdot 1=\underline{x(x+1)}$

b) $15y^3+5y=3\cdot 5\cdot y\cdot y^2+5\cdot y=\underline{5y(3y^2+1)}$

c) $x^2y-xy^2=xy\cdot x-xy\cdot y=\underline{xy(x-y)}$

d) $8xy=2\cdot 4\cdot x\cdot y=2\cdot 2\cdot 2\cdot xy=\underline{2\cdot 2\cdot 2\cdot x\cdot y}$

e) $10x+5=2\cdot 5\cdot x+5\cdot 1=\underline{5(2x+1)}$

Alla punkter i exempel 1 kan vi kontrollera genom multiplikation. Till exempel i c)-punkten får vi $xy(x-y)=x^2y-xy^2$.

Har du förstått? II

$12ab$ kan faktoriseras a) $3\cdot 4ab$ b) $3\cdot 2\cdot 2ab$ c) $a12b$

Har du förstått? III

$2x^2-6x$ faktoriserat är a) $x(2x-6)$ b) $2(2x-3x)$ c) $2x(x-3)$

Minnesreglerna

I polynomet x^2+2x+1 har termerna inte någon gemensam faktor som vi skulle kunna bryta ut. Ändå går x^2+2x+1 att faktorisera. Vi kan använda de minnesregler som vi behandlade i föregående passet. Där multiplicerade vi polynom som produktformade parentesuttryck med hjälp av minnesreglerna. Nu gäller det för oss att använda minnesreglerna baklänges:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Med hjälp av minnesregeln för kvadraten på en summa kan vi faktorisera x^2+2x+1 . x^2+2x+1 kan vi skriva på formen $x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2$ där a motsvaras av x och b av 1. Så är $x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=(x+1)^2$.

Exempel 2. Faktorisera polynomen a) m^2-n^2 b) y^2-16 c) $50a^2+20a+2$ d) $9x^2-12x+4$ e) $2a^5-2a$

a) Nu kan vi utnyttja regeln $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Vi får $m^2-n^2=\underline{(m-n)(m+n)}$.

b) Analogiskt med a)-fallet får vi nu $y^2-16=y^2-4^2=\underline{(y+4)(y-4)}$.

c) 2, 10 och 50 har en gemensam faktor 2. Vi kan bryta ut den. Så får vi $50a^2+20a+2=2(25a^2+10a+1)$. På uttrycket $(25a^2+10a+1)$ kan vi tillämpa minnesregeln för kvadraten på en summa. Nu får vi: $(25a^2+10a+1)=(5\text{a})^2+2\cdot 5\text{a}\cdot 1+1^2=(5\text{a}+1)^2$. Så är $50a^2+20a+2=\underline{2(5\text{a}+1)^2}$.

d) Nu har vi ett trinom. En av termerna är negativ. Den första och den sista termen kan vi skriva som kvadrater och den mellersta termen och dubbelt så stor som produkten av de termer som vi kvadrerade. I det här fallet kan vi alltså använda minnesregeln för kvadraten på en differens baklänges. $9\text{x}^2-12x+4=(3\text{x})^2-2\cdot 3\text{x}\cdot 2+2^2=\underline{(3\text{x}-2)^2}$

e) Nu är det helt klart att båda termerna har en gemensam faktor 2a . Vi bryter ut den. Men därefter tillämpar vi konjugatregeln två gånger, först på a^4-1 och sedan på a^2-1 . $2\text{a}^5-2\text{a}=2\text{a}(a^4-1)=2\text{a}((a^2)^2-1^2)=2\text{a}(a^2+1)(a^2-1)=\underline{2\text{a}(a^2+1)(a+1)(a-1)}$

Har du förstått? IV

i) a^2-9 kan faktoriseras a) $a\cdot a-3\cdot 3$ b) $(3+a)(3-a)$ c) $(a+3)(a-3)$

ii) $s^2+4\text{s}+4$ kan faktoriseras a) $s\cdot s+2\cdot 2\cdot s+2\cdot 2$ b) $(s+2)^2$ c) $(s+4)^2$

iii) $4\text{x}^2-8xy+4y^2$ kan faktoriseras a) $4(x-y)^2$ b) $(2\text{x}+2\text{y})^2$ c) $4(x^2-2\text{xy}+y^2)$

Har du förstått? V

x^4-16 kan faktoriseras a) $(x^2+4)(x^2-4)$ b) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$

c) $x^2\cdot x^2-4\cdot 4$

Har du förstått? VI

$2\text{x}^3-4\text{x}^2+2\text{x}$ kan faktoriseras a) $2x\cdot x\cdot x-2\cdot 2\cdot x\cdot x+2\cdot x$

b) $(x^2-2\text{x}+1)\cdot 2x$

c) $2\text{x}(1-x)^2$

Gruppering

Användning av grupperingsmetoden förutsätter att vi har ett polynom med ett jämnt antal termer. Vi grupperar termerna så att varje grupp har samma faktor:

$$ax+by+bx+ay=\underbrace{ax+bx}_{x\ som\ gemensam\ faktor}+\underbrace{ay+by}_{y\ som\ gemensam\ faktor}=\underbrace{x(a+b)+y(a+b)}_{(a+b)\ som\ gemensam\ faktor}=\underline{(a+b)(x+y)}$$

$ax+by+bx+ay$ kan vi alternativt gruppera även så här:

$$ax+by+bx+ay=\underbrace{ax+ay}_{a\ som\ gemensam\ faktor}+\underbrace{bx+by}_{b\ som\ gemensam\ faktor}=\underbrace{a(x+y)+b(x+y)}_{(x+y)\ som\ gemensam\ faktor}=\underline{(a+b)(x+y)}$$

Exempel 3. Faktorisera a) $x^2-xy-x+y$ b) $\frac{1}{3}k^3-k^2+\frac{2}{3}k-2$

a) $x^2-xy-x+y=\underbrace{x^2-xy}_{x\ som\ gemensam\ faktor}\overbrace{+(-1)x-(-1)y}^{-1\ som\ gemensam\ faktor}=\underbrace{x(x-y)-1(x-y)}_{Härav\ bryter\ vi\ ut\ (x-y).}=\underline{(x-y)(x-1)}$

b) $\frac{1}{3}k^3-k^2+\frac{2}{3}k-2=\frac{1}{3}\left(k^3-3k^2+2k-6\right)=\frac{1}{3}\left(k^2(k-3)+2(k-3)\right)=\underline{\frac{1}{3}(k^2+2)(k-3)}$. Det avgörande genombrottet i lösningen kommer med det att vi vågar bryta ut $\frac{1}{3}$ något som kräver att vi skriver $-k^2$ på formen $\frac{1}{3}(-3k^2)$ och -2 på formen $\frac{-6}{3}$.

Har du förstått? VII

$ab+3b+a+3$ faktoriserat är

a) $a(b+1)+3(b+1)$

b) $(a+3)(b+1)$

c) $a(b+\frac{3b}{a}+1+\frac{3}{a}),a\neq 0$

Exempel 4. Bestäm konstanten k så att polynomet $x^2-kx+36$ kan faktoriseras.

Då vi betraktar uttrycket $x^2-kx+36$ märker vi att den första termen är kvadraten x^2 och den tredje och sista termen kvadraten 6^2 . Vi kan använda minnesregeln $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$. Nu är $a=x$ och $b=6$. Nu måste $-2ab=-2x\cdot 6=-12x=-kx$ varav $\underline{k=12}$. Vi kan kontrollera resultatet genom insättning av k-värdet 12 och faktorisering: $x^2-kx+36=x^2-12x+36=x^2-2\cdot x\cdot 6+6^2=(x-6)^2$.

Har du förstått? VIII

I faktorisering av polynom prövar man alltid först a) utbrytningsmetoden.

b) konjugatregeln.

c) kvadreringsreglerna.

Har du förstått? IX

i) $9x^2+12xy+16y^2$ a) kan faktoriseras med kvadreringsregeln.

b) kan faktoriseras med konjugatregeln.

c) kan inte faktoriseras.

ii) Faktorisera $9x^2+24xy+16y^2$.

Har du förstått? X

i) $k^2+2kx-x^2$ a) kan inte faktoriseras.

b) kan faktoriseras med kvadreringsregeln.

c) kan faktoriseras med konjugatregeln.

ii) Faktorisera $k^2-2kx+x^2$.

5.3 Begreppsfrågor V

1. Vad kallas multiplikation i motsatt riktning? Vilken nytta har man av det?
2. Hurdant tal är ett primtal? Ge exempel på primtal.
3. Räkna upp faktoriseringsmetoder för polynom. Klargör kort hur de fungerar.
4. Kan man använda grupperingsmetoden vid faktorisering om man har ett polynom med ett udda antal termer?

5.4 Uppgifter

Faktorisera genom utbrytning i uppgifterna 1-5.

1. a) $3m+m^2$ b) $2m^2-5m^2$ c) $2am^5+m^3-3m^4$ d) am^3-nm^2 e) $5m^2-m$
2. a) $2x^2+3x^3$ b) ax^5-bx^3 c) $6x^3-2x^2+5x^5$ d) $6x^3-x^2+ax^2$ e) mx^6+nx^4
3. a) $3a+3b$ b) $7x-14a$ c) $16a-24x$ d) $21-49a$ e) $8a+12y$ f) $9h-6$
4. a) $mn+my$ b) pq^2-3p^2q c) $2st-6at^2$ d) mv^2-nv e) $16a^2b-8ab$
5. a) $6ax-9bx+21cx$ b) $42a^2y-35ay^2+7ay$ c) $12ab-18bc+24bd$

   d) $77a^2b+42ab^2-14ab$ e) $-27a^2-18a-36$ f) $9cz^4-21c^2z^3-15c^3z^2$

Faktorisera med konjugatregeln i uppgifterna 6 och 7.

6. a) k^2-1 b) x^2-4 c) $-y^2+25$ d) $1-s^2$ e) a^2-9 f) k^2-l^2 g) x^2-121

7. a) $4a^2-9b^2$ b) $64v^2-u^2$ c) $49-9y^2$ d) $0{,}04-s^2$ e) $0{,}25x^2-y^2$
f) $0{,}64s^2-0{,}09t^2$ g) $4b^2-0{,}09a^2$

Faktorisera. Använd först utbrytning och sedan konjugatregeln i uppgifterna 8 och 9.

8. a) $2x^2-2y^2$ b) $8x^2-8y^2$ c) ax^2-ay^2 d) $8-18s^2$ e) $5x-20b^2x$

9. a) $50k^2-98s^2$ b) $8k^2l^3-18s^2l^3$ c) $10a^3-40a^3b^2$ d) $3rs^2-12r^3t^2$

Använd kvadreringsregeln och faktorisera i uppgifterna 10-12.

10. a) $a^2+2\mathrm{a}+1$ b) x^2+4x+4 c) $w^2-2\mathrm{w}+1$ d) $y^2+8y+16$ e) $v^2-8v+16$

11. a) $4a^2+4\mathrm{a}+1$ b) $4a^2+12a+9$ c) $25c^2+30c+9$ d) $16s^2-24s+9$

12. a) $a^2+4ab+4b^2$ b) $4x^2-4xy+y^2$ c) $x^2y^2-2xyz+z^2$
d) $4a^2b^2+25c^2-20abc$ e) $0{,}01p^2+0{,}2p+1$

Faktorisera med hjälp av gruppering i uppgifterna 13-17.

13. a) $(m+n)a+(m+n)b$ b) $a(s-1)-(s-1)$ c) $m(a+b)-n(a+b)$

14. a) $2(3\mathrm{b}-c)+3\mathrm{c}(c-3\mathrm{b})$ b) $x(s-t)-2(t-s)$ c) $q(p-n)-r(p-n)$

15. a) $ax+ay+3x+3y$ b) y^3+y^2+y+1 c) $m^2+mn+5m+5n$

16. a) $ab+2b-3a-6$ b) $t^2-at-3t+3a$ c) y^3-3y^2-2y+6

17. a) $am-n+an-m$ b) $an+m+n+am$ c) $b^2y^3-3by+3-by^2$

Faktorisera först genom utbrytning och sedan vid behov med minnesreglerna eller gruppering i uppgifterna18-19.

18. a) $3x^2-6x+3$ b) $7x^2y^2-7z^4$ c) $6-24f^2d^7$ d) $a^2m-abm-2am+2bm$

19. a) $3x^2a+3ax-3x^2-3x$ b) $a^2xy-2a^2y+a^2x-2a^2$
c) $a^3b-a^2b^2+2a^2b-2ab^2$

Faktorisera i uppgifterna 20-22.

20. a) $a^2x^2-2abx+b^2$ b) $k^2m^2n^2+4mnk^2+4k^2$ c) $10a^2x-10abx-5ax+5bx$

21. a) $2x^3y+x^2y^2+2x^2y+xy^2$ b) $3rst^2-3rs$ c) $4a^4+12a^3+9a^2$

22.* a) $(2\mathrm{a}-b)^2-a^2$ b) $x^4-y^4+x^2+y^2$ c) $9w^2-4r^2+3\mathrm{w}+2\mathrm{r}$

23.* Bestäm det exakta värdet av uttrycket $(a^2-b)^2-(b+a^2)^2$ då $a=-\frac{1}{2}$ och $b=-\pi$.

24.* Visa att summan av två udda tal är ett jämnt tal.