PASS 7. EKVATIONSLÖSNING

7.1 Grundbegrepp om ekvationer

En ekvation säger att två matematiska uttryck är lika stora. Ekvationen har alltså ett likhetstecken och två deluttryck på var sin sida om likhetstecknet. Matematiska påståenden, som har ett sanningsvärde, kallas utsagor. Exempel på utsagor från pass 1 är $-2 \in \mathbb{Z}$ och $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Andra utsagor är $2 < 5$ och $k = 2$. Utsagorna $-2 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $2 < 5$ och $k = 2$ är alla sanna påståenden. Sanna påståenden har sanningsvärdet 1. Exempel på falska påståenden är $3 = 4$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ och $-1 > 3$. Falska påståenden har sanningsvärdet 0. $4\text{x} - 8$ är inte en utsaga för att det saknar ett sanningsvärde. Vi kan alltså inte säga om det är sant eller inte. Då vi skriver $4\text{x} - 8 = 8$ har vi en utsaga.

Exempel 1. Vilka av följande utsagor a) till f) är ekvationer ?

a) $2 > 5$ b) $2 = 3$ c) $7 \in \mathbb{N}$ d) $x + 2 = 4$ e) $x^2 < 0$ f) $x = 0$ g) 4+5=

b), d) och f) är ekvationer för att de innehåller två deluttryck på var sin sida om likhetstecknet. g) 4+5= är inte en ekvation för att det inte finns någonting på höger sida av likhetstecknet. $2 = 3$ är en ekvation med sanningsvärdet 0.

$x + 2 = 4$ är en ekvation . Den blir en sann utsaga då $x = 2$. Ett sådant variabelvärde som gör ekvationen sann kallar vi lösning eller rot till ekvationen. Ekvationen $x + 2 = 4$ har roten $x = 2$. Med $x = 2$ får båda leden i ekvationen samma värde 4: $2 + 2 = 4$. Roten $x = 2$ satisfierar ekvationen $x + 2 = 4$. Bestämning av roten till en ekvation kallar vi ekvationslösning.

Har du förstått? I

Vilken av följande utsagor är en ekvation? a) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ b) $\frac{k^2 - 4\text{k}}{k}$ c) $8 = 8$

Ekvationer kan man lätt lösa genom att tänka ut roten. En annan och bättre metod är att räkna ut roten.

Exempel 2. Lös ekvationen $8x+2=2(4x+1)$.

Vi kan tänka ut att roten är $x=1$ för att den satisfierar båda leden i den givna ekvationen:

$$8\cdot 1+2=2\cdot(4\cdot 1+1)$$
$$8+2=2\cdot 5$$
$$10=10$$

Med "tänka ut" -metoden fick vi svaret $x=1$. Är vi nu nöjda eller kunde vi tänka ut även andra rötter för den här ekvationen? Roten $x=0$ satisfierar båda leden lika bra som roten $x=1$. Vi måste återkomma till det här exemplet i exempel 7 och räkna ut roten.

7.2 Lösning av förstagradsekvationer

Vid förenkling av rationella uttryck kunde vi förenkla dem endast så att värdet av uttrycket inte förändrades. Till exempel kunde vi skriva $(x+1)^2=x^2+2x+1$ men inte $(x+1)^2=x^2+2x+1+1$. Vid lösning av ekvationer kan vi hyfsa de uttryck som finns på var sin sida om likhetstecknet. Utöver det här kan vi utföra lämpliga operationer i båda leden av ekvationen. Då förändras värdet av leden på samma sätt så att roten ändå förblir densamma. Vid lösning av ekvationer kan vi använda följande operationer:

1. Vi kan addera samma uttryck eller samma tal till båda leden. Vi kan subtrahera samma uttryck eller samma tal från båda leden. Vi kan flytta termer över likhetstecknet till det andra ledet om vi samtidigt utför teckenbyte.

2. Vi kan multiplicera eller dividera båda leden med talet noll eller med ett uttryck som inte har värdet noll.

Exempel 3. Vi vet att ekvationen $2=3$ har sanningsvärdet 0. Om vi multiplicerar båda leden med 0 får vi $0\cdot 2=0\cdot 3$ som är ekvivalent med $0=0$ som är en ekvation med sanningsvärdet 1. Att multiplicera med 0 ändrade på ekvationens sanningsvärde. Så är den här operationen absolut inte tillåten!

Exempel 4. Lös ekvationen . $-4s-1=s-2+2s$

$-4s-1=s-2+2s$ *Vi förenklar uttrycket i högra ledet.*

$\Leftrightarrow\ -4s-1=3s-2$ *Vi flyttar variabeltermen till vänstra ledet och konstanttermen till högra ledet och utför teckenbyte.*

$\Leftrightarrow\ -4s-3s=-2+1$ *Vi förenklar uttrycken i vänstra och högra ledet.*

$\Leftrightarrow\ -7s=-1$ *Vi dividerar båda leden med -7.*

$\Leftrightarrow\ s=\frac{1}{7}$ <u>Svar: Ekvationen har lösningen $s=\frac{1}{7}$</u> .

Vi kan kontrollera svaret så att vi insätter $s=\frac{1}{7}$ i den ursprungliga ekvationen. Så undersöker vi om ekvationen satisfieras av det insatta variabelvärdet.

KONTROLL $-4\cdot\frac{1}{7}-1=\frac{1}{7}-2+2\cdot\frac{1}{7}\Leftrightarrow-1\frac{4}{7}=-2+\frac{3}{7}\Leftrightarrow-1\frac{1}{4}=-1\frac{1}{4}$

Båda leden fick samma värde något som tyder på att vi har räknat ut roten rätt. Ekvivalenstecknet $\Leftrightarrow$ har vi använt i ekvationslösning och i kontrollen. I ekvationslösningen ovan är det inte obligatoriskt att använda ekvivalenstecknet. I fortsättningen lämnar vi bort det. Om man inte kan använda ekvivalenstecknet på rätt sätt är det bäst att lämna det helt och hållet bort. Så undviker man möjliga fel. I kontrollen ovan är det däremot obligatoriskt att använda ekvivalenstecknet för att vi har skrivit alla lösningsskeden på samma rad.

Har du förstått? II

i) Lös ekvationen $x+5+x=1$

ii) Ekvationen $4a+5(2-a)=0$ har lösningen a) $a=1$ b) $a=0$ c) $a=10$.

Exempel 5. a) Förenkla det rationella uttrycket $\frac{t+4}{4}-\frac{t-2}{5}$

b) Lös ekvationen $\frac{t+4}{4}-\frac{t-2}{5}=\frac{t}{2}$

a) $^{5)}\frac{t+4}{4}-{}^{4)}\frac{t-2}{5}=\frac{5(t+4)}{20}-\frac{4(t-2)}{20}=\frac{(5t+20)-4(t-2)}{20}=\frac{5t+20-4t+8}{20}=\underline{\frac{t+28}{20}}$

b) $\frac{t+4}{4}-\frac{t-2}{5}=\frac{t}{2}$ *Vänstra ledet kan vi skriva på formen* $\frac{t+28}{20}$ *enligt a) -punkten.*

$\frac{t+28}{20}=\frac{t}{2}$ *Vi multiplicerar ledvis med 20.*

$\frac{\cancel{20}(t+28)}{\cancel{20}}=\frac{\overset{10}{\cancel{20}}t}{\underset{1}{\cancel{2}}}$ *Vi förkortar uttrycken i vänstra och högra ledet.*

$t+28=10t$ *Vi flyttar t till högra ledet och utför teckenbyte och låter vänstra och högra ledet byta platser sinsemellan.*

$10t-t=28$ *Vi förenklar uttrycket i vänstra ledet.*

$9t=28$ *Vi dividerar båda leden med 9.*

$t=\frac{28}{9}$ *Vi skriver* $\frac{28}{9}$ *som blandat tal.*

$t=3\frac{1}{9}$ Svar: Ekvationen har lösningen $\underline{t=3\frac{1}{9}}$

Har du förstått? III

I ekvationen $\frac{x}{4}+\frac{2x-1}{3}=\frac{5}{6}$ avskaffas nämnarna genom att multiplicera båda leden med a) 6 b) 12 c) 3

Har du förstått? IV

Ekvationen $\frac{x}{4}+\frac{2x-1}{3}=\frac{5}{6}$ har lösningen a) $x=1\frac{3}{11}$ b) $x=1\frac{2}{11}$ c) $x=1\frac{1}{11}$.

Exempel 6. I gymnasiefysiken ingår bland annat termodynamik. I termodynamiken finns formeln

$\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}=\frac{1}{\eta}-1$, där η är verkningsgraden hos värmemaskinen och Q_1 och Q_2 värmemängder. Lös verkningsgraden η ur formeln $\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}=\frac{1}{\eta}-1$.

$\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}=\frac{1}{\eta}-{}^{\eta)}1$ Vi förlänger 1 med η .

$\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}=\frac{1}{\eta}-\frac{\eta}{\eta}$ Vi kan nu utföra subtraktionen i högra ledet.

$\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}=\frac{1-\eta}{\eta}$ Vi multiplicerar korsvis.

$Q_2\cdot\eta=(Q_1-Q_2)\cdot(1-\eta)$ Vi avskaffar parenteserna i högra ledet.

$Q_2\cdot\eta=Q_1\cdot 1-Q_1\cdot\eta-Q_2\cdot 1+Q_2\cdot\eta$ Vi flyttar termerna med η till vänsta ledet.

$Q_2\cdot\eta+Q_1\cdot\eta-Q_2\cdot\eta=Q_1-Q_2$ Vi förenklar vänstra ledet.

$Q_1\cdot\eta=Q_1-Q_2$ Vi dividerar båda leden med η .

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}$$ Svar: $\underline{\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}}$

Identiska ekvationer

En ekvation, som satisfieras av alla eller inga variabelvärden, är en identisk ekvation. Vid lösning av identiska ekvationer försvinner variabeln. Om det sista lösningssteget är sant är alla reella tal lösningar. Om det sista lösningssteget är falskt saknar ekvationen lösning.

Exempel 7. Nu återkommer vi till ekvationen $8x+2=2(4x+1)$ i exempel 2 och löser den.

$8x+2=2(4x+1)$

$8x+2=8x+2$ Vi har precis samma uttryck i båda leden.

$8x-8x=2-2$

$(8-8)x=0$

$0\cdot x=0$ Av den sista formen ser vi att ekvationen satisfieras av alla reella tal.

Svar: $\underline{x\in\mathbb{R}}$.

Exempel 8. Lös ekvationen $8x+2=4(2x+2)$.

$8x+2=4(2x+2)$

$8x+2=8x+8$

$8x-8x=8-2$

$(8-8)x=6$

$0\cdot x=6$ Av den sista formen ser vi att ekvationen inte satisfieras av några reella tal.

Svar: $\underline{x\notin\mathbb{R}}$.

Har du förstått? V

Ekvationen $6x-1+2x=8x$ har lösningen a) $x=-1$ b) $x\notin\mathbb{R}$ c) $x\in\mathbb{R}$.

Har du förstått? VI

Ekvationen $\frac{y-2}{6}+\frac{y}{2}=\frac{2y-1}{3}$ har lösningen a) $y=0$ b) $y \in \mathbb{R}$ c) $y \notin \mathbb{R}$.

7.3 Lösning av andragradsekvationer med hjälp av kvadratrötter

Ekvationer, vars variabel är av andra graden, kallas andragradsekvationer. Vi lär oss att lösa andragradsekvationer med en speciell formel under senare gymnasiekurser. Nu fäster vi dock vår uppmärksamhet vid sådana andragradsekvationer som går att lösa utan formel.

Exempel 9. Lös andragradsekvationen a) $4a^2=16$ b) $y^2-9=0$ c) $z^2+1=0$

a) $4a^2=16 \quad \| :4$

$a^2=4$

$\underline{a=2 \vee a=-2}$

b) Vi faktoriserar och använder nollregeln.

$y^2-9=0$

$(y+3)(y-3)=0$

$y+3=0 \vee y-3=0$

$\underline{y=-3 \vee y=3}$

c) Alla ekvationer i gymnasiematematik löser vi i de reella talens mängd. Vi vet att $z^2 \geq 0 \; \forall z \in \mathbb{R}$. Så är vänstra ledet i ekvationen alltid minst 1. Det får aldrig värdet 0.

Svar: $\underline{z \notin \mathbb{R}}$

$z^2+1=0$ har ingen lösning i de reella talens mängd. Men i högre matematik kan vi utvidga $\mathbb{R}$ med komplexa tal som är av formen $a+bi$ där a är realdelen, b imaginärdelen och i den imaginära enheten. För i gäller det att $i^2=-1$. Så har c) -punkten i föregående exemplet lösningen $z=i$ i de komplexa talens mängd $\mathbb{C}$.

Har du förstått? VII

Andragradsekvationen $5x^2-3=2$ har a) en rot b) inga rötter c) två rötter.

Har du förstått? VIII

$\frac{a-b}{x}=\frac{2}{3}$ har lösningen a) $x=\frac{3(a-b)}{2}$ b) $x=\frac{2(a-b)}{3}$ c) $x \in \mathbb{R}$

7.4 Begreppsfrågor VII

1. Vad är en ekvation för någonting?

2. Hur skiljer sig ekvationer från utsagor?

3. Berätta om sanningsvärden.

4. Förklara hur man löser förstagradsekvationer. Hurdana ledvisa operationer är tillåtna?

5. Nämn situationer i vardagslivet där man har nytta av ekvationslösning.

6. Förklara vad identiska ekvationer är. Ge möjligast enkla exempel på dem.

7. Skriv en vettig mening där begreppen kvadratrot, andragradsekvation och variabel förekommer.

7.5 Uppgifter

Lös ekvationerna i uppgifterna 1-7.

1. a) $2x+3=x-6$ b) $5-3y=4-2y$ c) $6t-1=3t+7$ d) $3t-5=19-5t$

2. a) $1{,}2x-0{,}6=3{,}3$ b) $-0{,}05y+0{,}8=0{,}2y-1{,}6$ c) $0{,}4+0{,}1h-1{,}8=0{,}2h$

3. a) $\frac{1}{6}x+1=x$ b) $5-1\frac{1}{3}s=\frac{5}{6}s+4$ c) $-2y+\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$ d) $6z+\frac{3}{8}=1\frac{3}{4}+4z$

4. a) $3{,}5(2x-1)+1{,}4=3x-4{,}9$ b) $3(2{,}5r-1)=-1{,}5$ c) $4\left(\frac{1}{8}z+\frac{1}{4}\right)=-(z-1)$

5. a) $\frac{x-2}{3}=1$ b) $\frac{y+1}{2}=\frac{y}{3}$ c) $\frac{x+1}{2}+1=\frac{x-2}{4}$ d) $2-\frac{s+6}{5}=-\frac{s}{3}$

6. a) $\frac{6x+5}{2}-\left(2x+\frac{2x-1}{2}\right)=0{,}25(10x+3)$ b) $\frac{6u+7}{7}+u=\frac{80+4u}{5}-\frac{30-2u}{2}$

7. a) $(-a+1)^2-(2+a)^2=-3(2a+1)$ b) $(h+2)^2=3+4h$

Lös ekvationerna i uppgifterna 8 och 9 med avseende på variabeln x.

8. a) $x+a=8$ b) $6x-5=a$ c) $8+6x=c$ d) $\frac{x}{5}=m$

9. a) $ax-2x=5, a\neq 2$ Vad händer om $a=2$? b) $2x-a=3$ Kan vi välja $a\in\mathbb{R}$?

Lös andragradsekvationerna i uppgift 10.

10. a) $x^2=256$ b) $(2+y)^2=4y$ c) $5x^2-2x=0$ d) $5a^2+5a=0$ e) $5a^2+5=0$

11. a) Lös r ur formeln $p=2\pi r$ b) Lös s och t ur formeln $v=\frac{s}{t}$.

12.* I hållfasthetsläran har total töjning ϵ formeln $\epsilon=\frac{\sigma}{E}+\alpha\cdot(\Delta T)$ där σ är spänning, E elasticitetsmodul, ΔT temperaturförändring och α en koefficient. Lös formeln $\epsilon=\frac{\sigma}{E}+\alpha\cdot(\Delta T)$ för spänningen σ .