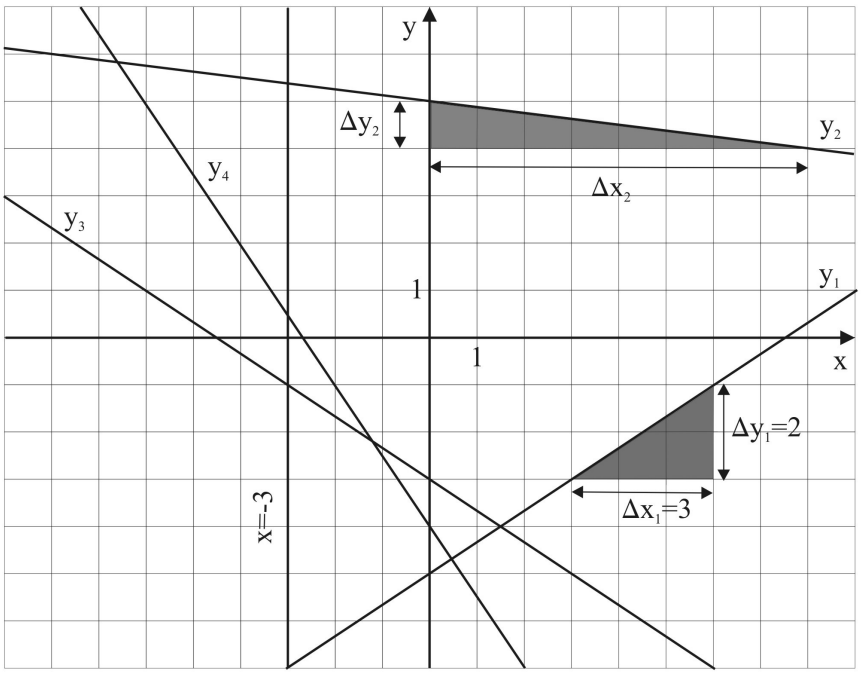
PASS 8. EKVATIONSSYSTEM OCH EN LINJES EKVATION

8.1 En linjes ekvation

En linjes ekvation kan framställas i koordinatsystemet. Koordinatsystemet består av x-axeln och y-axeln. X-axeln är vågrät och y-axeln lodrät. Axlarna skär varandra i origo och står vinkelrätt mot varandra. Vi börjar med att behandla en linjes ekvation med hjälp av figur 7 och dess bildtext.



OM EN LINJES EKVATION

Allmänt är en linjes ekvation av formen y=kx+b, där riktnings-koefficienten k bestämmer linjens lutning och konstanten b y-koordinaten för skärningspunkten mellan linjen och y-axeln. Linjen är stigande om k>0, fallande om k<0 och vågrät om k=0. Om k saknas, är linjen parallell med y-axeln och av formen x=a.

I koordinatsystemet till vänster är y_1 en stigande linje och y_2 en fallande linje. Linjen x=-3 är parallell med y-axeln.

Riktningskoefficienten för en linje kan vi bestämma genom att rita en rätvinklig triangel mellan två godtyckliga skilda punkter på linjen. Höjden på triangeln är Δy och basen Δx. Riktningsko-efficienten k= Δy/Δx. Vi kan ta Δy och Δx alltid som positiva och multiplicera kvoten med -1 om linjen är fallande. På kursen i analytisk geometri definieras riktningskoefficienten bättre.

Ur figuren ovan ser vi att y_1 skär y-axeln i punkten (0,-5) varav b=-5.
Vi bestämmer ekvationen för y_1 i koordinatsystemet ovan: $y_1=kx+b=\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}x+b=\frac{2}{3}x-5$

Figur 7.

8.2 Grafisk lösning av ekvationssystem

Vår uppgift är att grafiskt framställa ekvationerna $x+y=2$ och $y=x$ i koordinatsystemet samt undersöka om det i koordinatsystemet finns sådana punkter som satisfierar båda ekvationerna.

Alla punkter för vilka gäller att summan av x- och y-koordinaterna är 2 ligger på linjen $x+y=2$. Alla punkter för vilka gäller att y-koordinaten är lika stor som x-koordinaten ligger på linjen $y=x$. På linjen $x+y=2$ har vi oändligt många sådana punkter vars koordinater har summan två. På linjen y=x har vi oändligt många sådan punkter som har samma y-koordinat som x-koordinat. $x+y=2$ och $y=x$ är båda ekvationer med två variabler. Grafer av deras lösningar

är linjerna $x+y=2$ respektive $y=x$.

Då vi löser ut y ur ekvationen $x+y=2$ får vi $y=-x+2$. Vi kan rita linjerna $x+y=2$ och $y=x$ i koordinatsystemet genom att välja tre x-värden, och beräkna motsvarande y-värden genom insättning i ekvationerna. X- och y-värdena sätts in i en värdetabell. Så får vi punkterna A, B och C på linjen $x+y=2$ och punkterna D, E och F på linjen $y=x$ som vi placerar ut i koordinatsystemet. Det lönar sig att välja x-värdena så att talen är möjligast små. Så blir uträkningarna lätta. Den tredje punkten på linjen räknar vi ut bara för att kunna kontrollera om vi har bestämt de två första punkterna rätt. Om punkterna ABC samt DEF ligger på varsin räta linje, är det högst sannolikt att vi har kunnat utföra uträkningarna rätt.

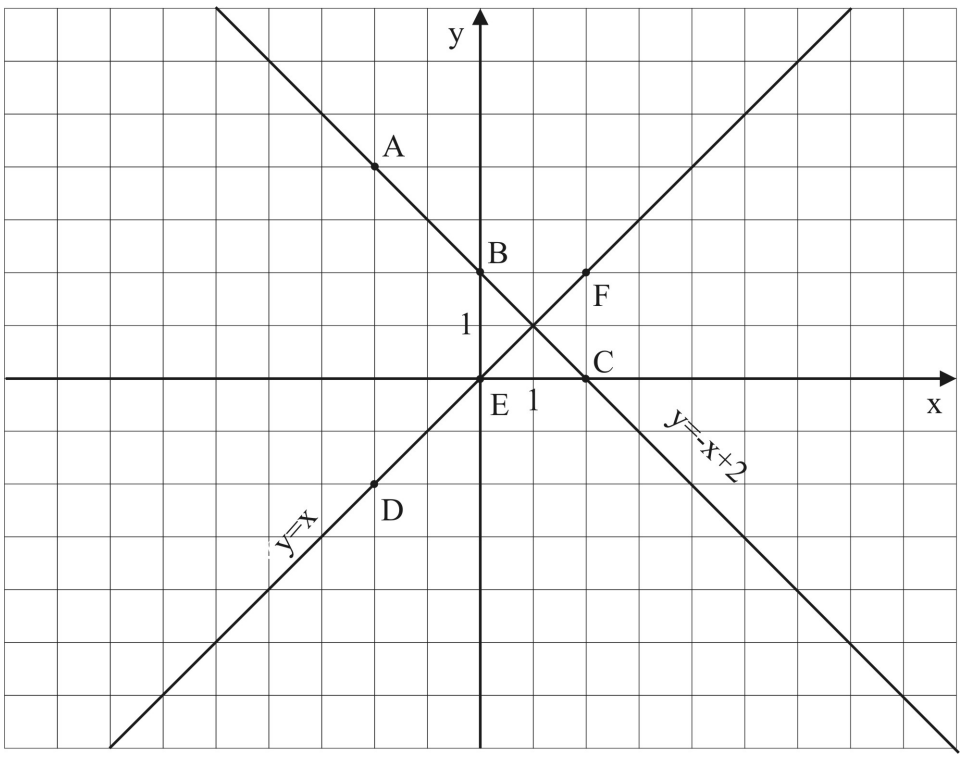
Ekvationen $x+y=2 \Leftrightarrow y=-x+2$

x-värde	insättning	y-värde	punkt
-2	$-(-2)+2=4$	4	$A=(-2,4)$
0	$-0+2=2$	2	$B=(0,2)$
2	$-2+2=0$	0	$C=(2,0)$

Ekvationen $y=x$

x-värde	insättning	y-värde	punkt
-2	-2	-2	$D=(-2,-2)$
0	0	0	$E=(0,0)$
2	2	2	$F=(2,2)$

Nu placerar vi punkterna A, B, C, D, E och F ut i koordinatsystemet. Det har vi gjort i figur 8.



Figur 8.

Vi ser ur figur 8 att linjerna skär varandra i en enda punkt (1,1) som motsvaras av talparet $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Det här talparet satisfierar både ekvationen $x+y=2$ och $y=x$ för att $1+1=2$ och $1=1$

. De båda ekvationerna kan vi skriva i formen $\begin{cases} x+y=2 \\ y=x \end{cases}$. Det här kallar vi ett ekvationssystem.

Systemet har lösningen $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$. Systemet löste vi grafiskt ovan. Vi ritade ekvationernas motsvarande grafer och avläste skärningspunktens koordinater.

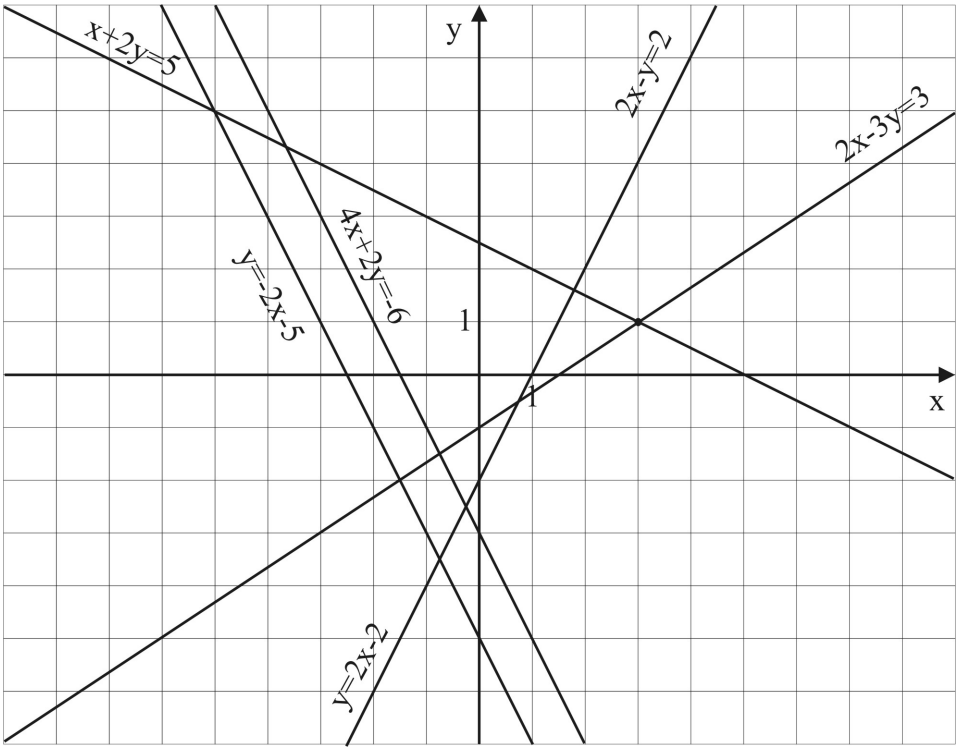
Exempel 1. Lös grafiskt a) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ y=2x-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+2y=-6 \\ y=-2x-5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$

Vi löser alla ekvationer med avseende på variabeln y och ritar ekvationernas motsvarande grafer i koordinatsystemet. Resultatet ser vi i figur 9.

a) Ur figur 9 ser vi att linjerna 2x-y=2 och y=2x-2 sammanfaller. Det är frågan om en och samma linje. Oändligt många talpar satisfierar det givna systemet. Systemet har lösningen $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y=2x-2 \end{cases}$

b) Vidare ser vi att linjerna $4x+2y=-6$ och $y=-2x-5$ är skilda parallella linjer som inte har några gemensamma punkter. Inga talpar satisfierar det givna systemet. <u>Systemet saknar lösning</u>.

c) Ur figuren kan vi avläsa att skärningspunkten är (3,1). Så har systemet lösningen $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.



Figur 9.

Har du förstått? I

Systemet $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ $a, b, d, e \neq 0$ har oändligt många lösningar. Ekvationernas motsvarande linjer a) är skilda parallella linjer b) sammanfaller c) har en gemensam punkt.

Har du förstått? II

Systemet $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ $a, b, d, e \neq 0$ har en lösning. Ekvationernas motsvarande linjer a) är skilda parallella linjer b) sammanfaller c) har en gemensam punkt.

Har du förstått? III

Systemet $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ $a, b, d, e \neq 0$ saknar lösningar. Ekvationernas motsvarande linjer a) är skilda parallella linjer b) sammanfaller c) har en gemensam punkt.

8.3 Algebraisk lösning av ekvationssystem

Det är jobbigt att lösa ekvationssystem grafiskt. Ibland kan vi få en skärningpunkt som inte har heltalskoordinater och då är det definitivt frågan om en närmevärdeslösning. För att kunna lösa ekvationssystem exakt använder vi den algebraiska lösningsmetoden.

Additionsmetoden

I additionsmetoden multiplicerar vi ekvationerna i systemet med sådana koefficienter att den ena eller den andra variabeln försvinner när vi adderar eller subtraherar ekvationerna ledvis. Vi får en summaekvation med en variabel. Vi löser den och får variabelns värde. Detta sätter vi in i någon av de ursprungliga ekvationerna. Genom att lösa den får vi värdet på den andra variabeln.

Exempel 2. Lös systemet $\begin{cases} x-3y=5\frac{1}{2} \\ 2x+y=5\frac{1}{5} \end{cases}$ med additionsmetoden.

$\begin{cases} x-3y=5\frac{1}{2} \\ 2x+y=5\frac{1}{2} \end{cases}$ *Vi multiplicerar den nedre ekvationen med 3.*

$\begin{cases} x-3y=5\frac{1}{2} \\ 6x+3y=16\frac{1}{2} \end{cases}$

$x-3y+6x+3y=5\frac{1}{2}+16\frac{1}{2}$

$7x=22$

$x=3\frac{1}{7}$

y löser vi genom att insätta $x=3\frac{1}{7}$ i $2x+y=5\frac{1}{2}$.

$2\cdot\frac{22}{7}+y=5\frac{1}{2}$

$y=\frac{7)11}{2}-\frac{2)44}{7}$

$y=\frac{7\cdot 11-2\cdot 44}{14}$

$y=-\frac{11}{14}$

<u>Svar:</u> $\begin{cases} x=3\frac{1}{7} \\ y=-\frac{11}{14} \end{cases}$

Insättningsmetoden

I insättningsmetoden löser vi den ena ekvationen med avseende på den ena variabeln. Därefter sätter vi in uttrycket för den ena variabeln i den andra ekvationen. Vi får en ny ekvation med endast en variabel som vi kan lösa. Den andra variabeln får vi så att vi sätter in den ena variabeln i någon av de ursprungliga ekvationerna.

Exempel 3. Lös systemet $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 3x-2y=-12 \end{cases}$ med insättningsmetoden.

Vi löser ut y ur den övre ekvationen: $2x+y=-1 \Leftrightarrow y=-2x-1$

Sedan insätter vi $y=-2x-1$ i den nedre ekvationen $3x-2y=-12$:

$$3x-2(-2x-1)=-12$$

$$3x+4x+2=-12$$

$$7x=-14 \quad \| :7$$

$$x=-2$$

Nu insätter vi $x=-2$ i $y=-2x-1$: $y=-2\cdot(-2)-1=3$ <u>Svar:</u> $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$.

Har du förstått? IV

i) Systemet $\begin{cases} y=-7x+3 \\ 2x-4y=-8 \end{cases}$ kan bäst lösas genom att använda a) additionsmetoden

b) insättningsmetoden

ii) Lös systemet.

Har du förstått? V

i) Systemet $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=-4 \end{cases}$ kan bäst lösas genom att använda a) additionsmetoden

b) insättningsmetoden

ii) Lös systemet.

Har du förstått? VI

Lös systemet $\begin{cases} 10x+4=12y-10 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$ både grafiskt och algebraiskt. Systemet har lösningen

a) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=x+1 \end{cases}$

8.4 Begreppsfrågor VIII

1. Hur ritar man en linje i koordinatsystemet?
2. En linjes ekvation är grafiskt framställd i koordinatsystemet. Det vill säga att grafen till linjen har ritats i koordinatsystemet. Hur kan man avläsa linjens ekvation ur figuren?
3. Vad är ett ekvationssystem?
4: Förklara kort hur man löser ekvationssystem grafiskt.
5. Vilka dåliga sidor har den grafiska lösningsmetoden av ekvationssystem?
6. Konstruera och lös ett enkelt ekvationssystem som ansluter sig till det vardagliga livet.
7. Jämför additionsmetoden och insättningsmetoden vid algebraisk ekvationslösning.

8.5 Uppgifter

1. Rita linjerna a) $3x+4y-24=0$ b) $2x-5y+15=0$ c) $5x-3y=0$ d) $y=\frac{3}{4}x+1$ i koordinatsystemet.

2. Lös systemet a) $\begin{cases} y+2x=-2 \\ y-x=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x=y+1 \\ y-3=-x \end{cases}$ grafiskt.

3. Lös systemet a) $\begin{cases} 2x+16=-7y \\ 5x=2y-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x+8y-7=0 \\ 2x+3y-12=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-3y=15 \\ 30=-3x-5y \end{cases}$

4.Lös systemet a) $\begin{cases} -4x+y=8 \\ 6x+30=5y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=10 \\ 8x-4y-40=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{2}{9}y=\frac{1}{3} \\ 12x-24=-8y \end{cases}$

5. Använd figur 7 i den här uppgiften.

   a) Bestäm ekvationen för y_2 .

   b) Bestäm det ekvationssystem som fås av y_1 och y_2 och lös systemet.

   c) Bestäm det ekvationssystem som fås av linjerna x=-3 och y_1 .
   Lös systemet och kontrollera resultatet grafiskt.

   d) Bestäm ekvationerna för y_3 och y_4 . Bestäm skärningpunkten mellan y_3 och y_4 .

6. Lös systemet a) $\begin{cases} \frac{1}{3}y+1=\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{8}x=\frac{2}{3}y-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a+b=12 \\ \frac{a}{b}=2 \end{cases}$, $b\neq 0$ c) $\begin{cases} 0{,}01u-0{,}06v=0{,}12 \\ 0{,}01u+0{,}05v=0{,}01 \end{cases}$.

7. Systemet $\begin{cases} y+2x=-2 \\ y-x=1 \end{cases}$ kan skrivas på formen $\begin{cases} y=-2x-2 \\ y=x+1 \end{cases}$ och vidare $-2x-2=y=x+1$. Skriv $10x+5y=20=8x+8y$ som ekvationssystem och lös systemet.

8. Undersök om linjerna a) $3x+y=6$, $x-3y=-6$ och $5x+2y=10$

b) $2x-3y=-5$, $x+8y=26$ och $5x+2y=16$

c) $3x+7y=-6$, $x+5y=-10$ och $2x+2y=4$

skär varandra i en och samma punkt. Tips: Det lönar sig att undersöka om två av linjerna skär varandra genom att bilda ett ekvationssystem och bestämma den möjliga skärningspunkten. Därefter ska man undersöka om den erhållna skärningspunkten satisfierar den tredje av ekvationerna.

9.* Lös systemet $\begin{cases} -\frac{6}{b}+\frac{2}{a}=4 \\ \frac{1}{a}+\frac{2}{3b}=\frac{1}{3} \end{cases}$. Tips det lönar sig att insätta $\frac{1}{a}=x$ och $\frac{1}{b}=y$.

Lös sedan ut x och y och därefter a och b.